

# 圏論の普遍性の証明を ChatGPT に書かせてみた

奈須隼大

2023年12月4日

普遍性とは、圏の各対象に対する構造の割り当てが、実は特別な一つの対象との間の射によって実現される現象である。圏論の学び初めには具体例を通して様々な普遍性を理解することが重要だが、ある対象が普遍性を持つことの証明で最初のうちは少しまわりくどい説明に陥る人が多いように思う。実際、筆者もその一人であった。そこでこの記事では、ChatGPT に書かせた証明を紹介することで普遍性を証明する際のコツを初学者に伝えることを目的とする。

例として、二つのベクトル空間  $V, W$  の直和  $V \oplus W$  が coproduct (余積) であることの証明を ChatGPT に書いてもらった。(最初は間違いだらけだったので何回も訂正してもらった。あと、直和における  $\text{pair}(v, w)$  を  $v \oplus w$  と書いていることに注意されたい。)

**イマイチな証明 by ChatGPT [Ope23]** 直和  $V \oplus W$  が余積の普遍性を満たすことを示します。

条件を再確認します。余積の普遍性とは、任意の線形空間  $X$  および射  $\iota_V : V \rightarrow V \oplus W$ 、 $\iota_W : W \rightarrow V \oplus W$  が存在し、任意の線形写像  $f : V \rightarrow X$ 、 $g : W \rightarrow X$  に対して、射  $h : V \oplus W \rightarrow X$  が一意に存在して次の条件を満たすことです。

$$(i) h \circ \iota_V = f$$

$$(ii) h \circ \iota_W = g$$

射  $\iota_V$  と  $\iota_W$  の定義は以下の通りです：

$$\iota_V(v) = v \oplus 0 \quad (v \in V)$$

$$\iota_W(w) = 0 \oplus w \quad (w \in W)$$

また、 $h : V \oplus W \rightarrow X$  の定義は次の通りです：

$$h(v \oplus w) = f(v) + g(w) \quad (v \in V, w \in W)$$

これによって、 $h$  が条件を満たすことを確認しました。

次に、射  $h'$  が同様の条件を満たすと仮定します。すなわち、

$$(i) h' \circ \iota_V = f$$

$$(ii) h' \circ \iota_W = g$$

このとき、 $h$  と  $h'$  が等しいことを示します。任意の  $v \oplus w \in V \oplus W$  について、 $h(v \oplus w) = h'(v \oplus w)$  を示します。 $v \oplus w = (v \oplus 0) + (0 \oplus w)$  と直和の定義を利用します。すると、 $v \oplus w$  は  $\iota_V(v) + \iota_W(w)$  と同値です。したがって、 $h(v \oplus w) = h(\iota_V(v) + \iota_W(w)) = h(\iota_V(v)) + h(\iota_W(w))$  です。同様に、 $h'(v \oplus w) = h'(\iota_V(v)) + h'(\iota_W(w))$  です。仮定により、 $h'(\iota_V(v)) = f(v)$  かつ  $h'(\iota_W(w)) = g(w)$  です。したがって、 $h'(v \oplus w) = h(v \oplus w)$  となります。以上より、任意の  $v \oplus w \in V \oplus W$  に対して  $h(v \oplus w) = h'(v \oplus w)$  が成り立つため、 $h = h'$  であり、 $h$  と  $h'$  は等しいことが示されました。これにより、直和  $V \oplus W$  は余積の普遍性を満たすことが確認されました。 🌲

何がイマイチかという、存在のところで構成した  $h$  を用いて一意性を証明しているために冗長になっていることである。先に天下一りに  $h$  を定義してしまっただけでそのあとその必然性を示すという恰好になっている。つまり、 $h$  の満たすべき条件を  $\varphi(h)$  と書くと、 $\exists! h \varphi(h)$  という形の命題を証明するときに、

(i)  $\exists h \varphi(h)$  を具体的に示す。

(ii)  $\varphi(h') \Rightarrow h = h'$  を示す。ただし、 $h$  は 1. で構成したものである。

という流れになっている。これでは、 $\varphi(h)$  という条件の本質が見えにくいし、そもそも実際に自分で証明を考えるのに無理がある。素直な証明は次のようなものである。

(i)  $\varphi(h) \Rightarrow \psi(h)$  を示す。ただし、 $\psi(h)$  は  $h$  が満たすべき条件であって、 $\psi(h)$  を満たすような  $h$  は  $h_0$  のみである（ことが簡単にわかる）。

(ii)  $\varphi(h_0)$  を示す。

こうすれば、 $\varphi(h)$  という条件を調べることがおのずと  $h$  の構成につながるので、証明の流れが自然になる。

これを踏まえ、まじな証明を書いてみる。

**証明** 直和  $V \oplus W$  が余積の普遍性を満たすことを示す。

$h: V \oplus W \rightarrow X$  が

(i)  $h \circ \iota_V = f$

(ii)  $h \circ \iota_W = g$

を満たすと仮定する。このとき、任意の  $v \in V, w \in W$  に対して

$$\begin{aligned} h(v \oplus w) &= h(\iota_V(v) + \iota_W(w)) \\ &= h(\iota_V(v)) + h(\iota_W(w)) \\ &= f(v) + g(w) \end{aligned}$$

となる。 $h$  はこれらの値で決定されるので、 $h$  は一意に定まる。また、実際  $h(v \oplus w) = f(v) + g(w)$  と定めれば  $h$  は線形写像を定め、

$$h(\iota_V(v)) = h(v \oplus 0) = f(v)$$

$$h(\iota_W(w)) = h(0 \oplus w) = g(w)$$

となるので、この  $h$  は条件を満たす。 ✦

そもそも数学ではこのような証明の仕方をすることが多い。例えば、 $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_0 = 1$  という漸化式を解くとき、 $a_n = 2^n - 1$  という数列を与えてそれがこの漸化式を満たすことを示してから任意の解がこれに一致することを示す、なんて人はいないだろう。 $a_n$  がどのような数列であるべきかを漸化式から導き出すのが自然だ。このプロセスは（高校数学で明示的には書かれなくてもいいが） $a_n$  の一意性を担保している。圏論における一意存在証明も同じはずなのに、このようなイマイチ証明に陥りがちなのは謎である。

この方法が通用しないのは、 $h$  の構成が難しい場合である。そういった場合は、何らかの大道具によって存在を保証してから一意性を示すという流れになる。とはいえ、その場合も具体的な構成が得られない以上、上のイマイチな証明のように議論が重複することは生じないはずだ。

## 参考文献

- [Ope23] OpenAI. ChatGPT 3.5. Retrieved from OpenAI ChatGPT Knowledge Base, 2023. Accessed: 2023-12-03.