圏の内部等式論理

ナス

2022 年 12 月 18 日

この記事は圏論 Advent Calendar 2022 に 18 日目の記事として投稿されました．記事に対する誤りの指摘，質問などがあればナス（@Ngaastue) にお寄せください．本当はもう少しラフな記事にしたかったのですが結果的に（特に syntax の部分は）堅苦しいものになってしまいました．読んでくださる方に内部論理の雰囲気がぼんやりとでも伝われば幸いです．Hi!

ある日，私が参加する自主ゼミ (代数系) で，次のようなことを発表者が示そうとしていた[*]：

> $f : X \to Y, g : Z \to Y, h : X \to W$ に対し，
>
> $$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r, "\Delta_{X/Y} \times_Y 1_Z"] \arrow[d, "X \times_Y \Delta_Z"'] & (X \times_Y X) \times_Y Z \arrow[d, "(h \circ \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{pr}_1,\, q \times_Y 1_Z)"] \\ X \times_Y (Z \times_Y Z) \arrow[r, "(h \circ \mathrm{pr}_1,\, (g \times_Y 1_Z) \circ \mathrm{pr}_2)"'] & W \times (Y \times_Y Z) \end{tikzcd}$$
>
> は可換図式である．（q は pullback square の斜めに伸びる射である．その他の射の定義は推し量っていただきたい．）

こういった状況は数学の様々な分野で現れるだろう．すなわち，与えられた射や恒等射から普遍性によって定義される二つの射が一致することを確かめなければいけない状況である．もちろん，それぞれの射がどのような普遍性を使って定義されているかを一つ一つ見ていけば確認は難しくはない．だが，その図式が可換であることは直観としては明らかであり，そのような議論に時間を割くのは無駄かもしれない．我々が直観的に明らかだと思う理由の一つは，これがもし集合の圏ならば定義域から任意に元を取りそれを二つの写像で送ることで確かめられることにある．だがこれは Set への faithful な関手を持つ圏でしか意味をなさない．

にもかかわらず，「形式的に元を取りその像の一致を確認する」方法はある意味で正当化される．その手段としてこの記事では内部等式論理について紹介しようと思う．基本的なアイデアは，「（適切な極限をもつ）圏は対象のデータと射のデータ，そして可換図式のデータで決定される」ということにある．

以下，簡単のため圏は有限極限を持つものとする．また，syntax について本当は配慮すべきことがいくつもあるが，この記事では簡単のためにいい加減に扱うことをご了承頂きたい．また，集合，圏の大きさの問題も気にしないことにする．

1　多ソート等式論理

まずは等式論理を導入する．細かい定義が続くので軽く読み流して必要な時に参照していただきたい．

---

[*]便宜上，実際に扱われた図式とは別の図式を使っている．

定義 1– 言語，コンテクスト，項

1. ソートの集合 S と**関数記号**の集合 F の組 $\mathcal{L} = (S, F)$ を**言語**という．各関数記号 $f \in F$ には **domain** と呼ばれるソートの有限列 $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in S)$ と **range** と呼ばれるソート τ $(\tau \in S)$ が割り当てられていて，$(f : \sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \tau)$ と表される．
2. 言語 $\mathcal{L}$ のソートが割り当てられた変数記号の有限列 $\Gamma = \langle x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \rangle = \langle \overline{x} : \overline{\sigma} \rangle$ のことを言語 $\mathcal{L}$ の**コンテクスト**という．このとき，σ_i をこのコンテクストにおける x_i の**型**という．コンテクスト $\Gamma = \langle x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \rangle$ と $\Delta = \langle y_1 : \tau_1, \ldots, y_m : \tau_m \rangle$ を並べて得られるコンテクスト $\langle x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n, y_1 : \tau_1, \ldots, y_m : \tau_m \rangle$ を Γ, Δ と表す．コンテクスト $\Gamma = \langle x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \rangle$ のうち第 i 番目の変数を除いて得られるコンテクスト $\langle x_1 : \sigma_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n : \sigma_n \rangle$ を $\Gamma_{\hat{i}}$ と表す．[a]
3. 言語 $\mathcal{L}$ のコンテクスト Γ における**項**は次で帰納的に定義される．
   - $x_i : \sigma_i$ が Γ に現れるとき，x_i は Γ における型 σ_i の項である．
   - $(f : \sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \tau) \in F$ であり，$i = 1, \ldots, n$ について M_i が Γ における型 σ_i の項のとき，$f(M_1, \ldots, M_n)$ は Γ における型 τ の項である．

   M が Γ における型 σ の項であることを $\Gamma \,\big|\, M : \sigma$ と表せば，上の定義は次の導出規則を意味する．

$$\frac{x_i : \sigma_i \in \Gamma}{\Gamma \,\big|\, x_i : \sigma_i} \qquad \frac{\Gamma \,\big|\, M_1 : \sigma_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma \,\big|\, M_n : \sigma_n \qquad (f : \sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \tau) \in F}{\Gamma \,\big|\, f(M_1, \ldots, M_n) : \tau}$$

[a] 変数記号の扱いについては深く立ち入らないが，必要なら適切に別の変数記号に取り換えることができることにしておく．

コンテクスト Γ と Δ の間に有限列としての包含 $\Gamma \subset \Delta$ があるとき，Γ における項 $M : \tau$ は自然に $\Delta \,\big|\, M : \tau$ と見なせる．導出木を書き換えることでこのことは確かめられる．以降このような同一視を自由に行うことにする．

この記事で扱う論理は等式論理，すなわち，命題としてはある同じ型をもつ 2 つの項が等しいことを主張する等式のみを考える．

定義 2– 等式, 理論

1. 言語 $\mathcal{L}$ のコンテクスト Γ における**等式**とは，Γ において共通の型 σ をもつ項 M, M' の組 $M =_\sigma M'$ である．[a] これを $\Gamma \,\big|\, M =_\sigma M'$ と表す．簡単のため，このようなコンテクストと等式の組のことも等式と呼ぶ．
2. 言語 $\mathcal{L}$ における等式 $\Gamma \,\big|\, M =_\sigma M'$ の集合 $\mathcal{T}$ を（等式）**理論**と呼ぶ．[b]

[a] これは単なる記号でありこの段階ではただの項の組でしかない．
[b] 定義 5 の 1. を参照

定義 3– 代入

$\mathcal{L}$ を言語とする．$\mathcal{L}$ のコンテクスト $\Gamma = \langle x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \rangle$ における項 $M : \tau$ に対する変数 x_i への項 $\Gamma_{\hat{i}} \,\big|\, N : \sigma_i$ の**代入** $M[N/x_i]$ とは次で帰納的に定義されるコンテクスト Γ における型 τ の項である．

- $\Gamma \,\big|\, x_i[N/x_i] : \sigma_i$ は $\Gamma \,\big|\, N : \sigma_i$ と定義する．
- $i \neq j$ のとき，$\Gamma \,\big|\, x_j[N/x_i] : \sigma_j$ は $\Gamma \,\big|\, x_j : \sigma_j$ と定義する．

- $\Gamma \,\middle|\, f(M_1,\ldots,M_m)[N/x_i] : \tau$ は $\Gamma \,\middle|\, f(M_1[N/x_i],\ldots,M_m[N/x_i]) : \tau$ と定義する．

例 4: 加群の言語

ソート r, v を持ち，関数記号として，

$$\begin{array}{lllll} + : r, r \to r, & 0 : \to r, & -() : r \to r, & \cdot : r, r \to r, & 1 : \to r \\ + : v, v \to v, & 0 : \to v, & -() : v \to v, & \cdot : r, v \to v & \end{array}$$

を持つ言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{mod}}$ は環とそれで係数づけられた加群を表すことのできる言語である．r は環，v は加群を表すソートである．この言語のもとの等式理論として，環の公理と環上の加群の公理を表す等式全体を $\mathcal{T}_{\mathrm{mod}}$ とおく．

ここでは形式体系として（コンテクストがついた）シーケント計算を用いる．

定義 5– シーケント，証明

1. 言語 $\mathcal{L}$ の**シーケント**とは，コンテクスト Γ と Γ における等式の有限列 $M_1 =_{\sigma_1} M_1', \ldots, M_n =_{\sigma_n} M_n'$，及び等式 $N =_\tau N'$ の組である．これは $\Gamma \,\middle|\, M_1 =_{\sigma_1} M_1', \ldots, M_n =_{\sigma_n} M_n' \vdash N =_\tau N'$ と表され，$\vdash$ の前にある等式の有限列を**前件**，後ろにある等式を**後件**という．前件として空列 $\emptyset$ をとるとき，シーケントは $\Gamma \vdash N =_\tau N'$ のように表す．等式を前件が空のシーケントとみることで，等式理論 $\mathcal{T}$ をシーケントの集合と見なす．
2. シーケントに関する次の推論規則からなる形式体系を**多ソート等式論理の形式体系**と呼ぶ．以下，Γ はコンテクスト $\langle x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \rangle$ を表し，Φ, Ψ は等式の有限列を表す．また，$\Phi[M/x]$ は等式それぞれに代入して得られる等式の列とする．

$$\frac{\Gamma \,\middle|\, M : \sigma}{\Gamma \vdash M =_\sigma M}\ (\text{反射律}) \qquad \frac{\Gamma \,\middle|\, \Phi \vdash M =_\sigma N}{\Gamma \,\middle|\, \Phi \vdash N =_\sigma M}\ (\text{対称律})$$

$$\frac{\Gamma \,\middle|\, \Phi \vdash L =_\sigma M \qquad \Gamma \,\middle|\, \Phi \vdash M =_\sigma N}{\Gamma \,\middle|\, \Phi \vdash L =_\sigma N}\ (\text{推移律})$$

$$\frac{\Gamma_{\hat{i}} \,\middle|\, \Phi \vdash M =_{\sigma_i} N \qquad \Gamma \,\middle|\, L : \tau}{\Gamma_{\hat{i}} \,\middle|\, \Phi \vdash L[M/x_i] =_\tau L[N/x_i]}\ (\text{代入律})$$

$$\frac{\Gamma_{\hat{i}} \,\middle|\, \Phi \vdash M : \sigma_i \qquad \Gamma \,\middle|\, \Phi \vdash K =_\tau L}{\Gamma_{\hat{i}} \,\middle|\, \Phi[M/x_i] \vdash K[M/x_i] =_\tau L[M/x_i]}\ (\text{置換律})$$

他にも，コンテクスト及び前件についての弱化，入れ替え，複製などの規則が必要だが今回は syntactical な証明をしないため省略する．理論 $\mathcal{T}$ から上の推論規則を用いて導出されるシーケントを $\mathcal{T}$ の帰結と呼び，あるシーケントが $\mathcal{T}$ の帰結であることを

$$\mathcal{T} \Vdash \Gamma \,\middle|\, M_1 =_{\sigma_1} M_1', \ldots, M_n =_{\sigma_n} M_n' \vdash N =_\tau N'$$

などと表す．

2　圏論的意味論と圏の内部言語

上で定義された項や等式に解釈を与えたい．例えば，言語が与えられたとき，そのソートに集合を，関数記号に写像を割り当てることで等式の解釈が定まる．これを（有限極限を持つ）圏で行いたい．

定義 6– 解釈

1. 言語 $\mathcal{L} = (S, F)$ に対し，圏 $\mathcal{C}$ における $\mathcal{L}$-**構造**とは，各 $\sigma \in S$ に対する $\mathcal{C}$ の対象 $A(\sigma)$ の割り当てと各 $f : \sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \tau$ に対する $\mathcal{C}$ の射 $A(f) : A(\sigma_1) \times \cdots \times A(\sigma_n) \to A(\tau)$ の割り当ての組 A のことである．以下，$\Gamma = \overline{x} : \overline{\sigma} = \langle x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \rangle$ に対し，$A(\Gamma) := A(\overline{\sigma}) := A(\sigma_1) \times \cdots \times A(\sigma_n)$ と表すことがある．
2. 圏 $\mathcal{C}$ 上の $\mathcal{L}$-構造 A が与えられたとき，項 $x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \,\Big|\, M : \sigma$ の A における**解釈**とは次のように帰納的に定まる圏 $\mathcal{C}$ における射 $M^A : A(\sigma_1) \times \cdots \times A(\sigma_n) \to A(\sigma)$ のことをいう．
   - $\Gamma = \langle x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \rangle$ の項 $\Gamma \,\Big|\, x_i : \sigma_i$ の解釈 x_i^A を第 i 射影 $A(\sigma_1) \times \cdots \times A(\sigma_n) \to A(\sigma_i)$ で定める．
   - Γ における項 $M_1 : \tau_1, \ldots, M_m : \tau_m$ と関数記号 $f : \tau_1, \ldots, \tau_m \to \upsilon$ に対し，項 $\Gamma \,\Big|\, f(M_1, \ldots, M_m)$ の解釈 $f(M_1, \ldots, M_m)^A$ を合成

$$A(\Gamma) \xrightarrow{(M_1^A, \ldots, M_m^A)} A(\tau_1) \times \cdots \times A(\tau_m) \xrightarrow{A(f)} A(\upsilon)$$

     で定める．

定義 7– 理論のモデル

言語 $\mathcal{L}$ の理論 $\mathcal{T}$ の圏 $\mathcal{C}$ における**モデル**とは，$\mathcal{L}$-構造 A であって，$\mathcal{T}$ の任意の等式 $\Gamma \,\Big|\, M =_\tau N$ についてその解釈 $M^A, N^A : A(\Gamma) \to A(\tau)$ が一致するものである．

例 8: 加群のモデル

例 7 の理論 $\mathcal{T}_{\mathrm{mod}}$ の Set におけるモデルとは，環とそれ上の加群の組の事である．$\mathcal{T}_{\mathrm{mod}}$ の位相空間の圏 Top におけるモデルとは，位相環と作用が連続な位相加群の組の事である．

次に，与えられた圏から言語を作る．

定義 9– 内部言語

圏 $\mathcal{C}$ の**内部言語** $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ とは，対象のクラスをソート全体，各 $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{C}$ に対し $\mathcal{C}(A_1 \times \cdots \times A_n, B)$ を $A_1, \ldots, A_n \to B$ 型の関数記号全体とする言語である．

$\mathcal{C}$ における標準的な $\mathcal{L}(\mathcal{C})$-構造として，各ソート，つまり対象にそれ自身を，関数記号，つまり射にそれ自身を割り当てるものがある．これを $A(\mathcal{C})$ とする．この構造で解釈することで正しいとされる等式を全て集めてできる等式理論を $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ とする．こうして，圏における図式の可換性は形式的に記述されることがわかった．

3　等式の圏

この記事の目的は canonical に得られた図式の可換性を“簡単に”確かめることであった．そのためには，可換性の確認が“簡単な”圏を作り，そこからの関手を作ればよい．我々にとって簡単なのが元の追跡である

とすれば，形式的に元を取ることを可能にする構文論的な圏を作ればよいのである．

定義 10– 等式の圏

言語 $\mathcal{L}$ の等式理論 $\mathcal{T}$ に対し，圏 $\mathcal{E}_{\mathcal{L},\mathcal{T}}$ を次で定義する．対象はコンテクストとそこでの等式の有限列の組である．これを

$$\{\, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \mid M_1 =_{\tau_1} N_1, \ldots, M_m =_{\tau_m} N_m \,\} = \{\overline{x} : \overline{\sigma} \mid \overline{M} =_{\overline{\tau}} \overline{N}\,\}$$

のように表す．有限列が特に空列の時は $\{\overline{x} : \overline{\sigma}\,\}$ のように表す．

$\{\overline{x} : \overline{\sigma} \mid \overline{M} =_{\overline{\tau}} \overline{N}\,\}$ から $\{\overline{y} : \overline{\upsilon} \mid \overline{K} =_{\overline{\phi}} \overline{L}\,\}$ への射は，コンテクスト $\overline{x} : \overline{\sigma}$ における型が $\overline{\upsilon}$ の項の有限列 $\overline{x} : \overline{\sigma} \,\Big|\, \overline{P} : \overline{\upsilon}$ であって，

$$\mathcal{T} \Vdash \overline{x} : \overline{\sigma} \,\Big|\, \overline{M} =_{\overline{\tau}} \overline{N} \vdash \overline{K}[\overline{P}/\overline{y}] =_{\overline{\phi}} \overline{L}[\overline{P}/\overline{y}]$$

を充たすものの同値類である．ここで同値関係は

$$\overline{P} \sim \overline{P}' \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{T} \Vdash \overline{x} : \overline{\sigma} \,\Big|\, \overline{M} =_{\overline{\tau}} \overline{N} \vdash \overline{P} =_{\overline{\upsilon}} \overline{P}'$$

で定義する．合成は代入によって定義される．恒等射は変数記号をそのまま項とみなしたものの同値類として定義される．これを**等式の圏**と呼ぶ．[a]

[a] この名前は一般的ではない．

上の定義が実際に圏を与えることは置換律，代入律が合成の welldefinedness に対応することなどからわかる．

2 つの射 $f, g : X \to Y$ の equalizer を $\mathsf{Eq}(f,g) \to X$ と表す．これは mono 射なので $\mathsf{Eq}(f,g)$ は X の部分対象と見なせる．

定理 11 (等式の圏からの関手)

等式の圏 $\mathcal{E}_{\mathcal{L}(\mathcal{C}),\mathcal{T}(\mathcal{C})}$ から圏 $\mathcal{C}$ に関手 $F_{\mathcal{C}}$ が次のようにして定まる．この言語のソートは $\mathcal{C}$ の対象であることに注意されたい．

- 対象 $\{\, x_1 : X_1, \ldots, x_n : X_n \mid \overline{M} =_{\overline{Z}} \overline{N}\,\}$ を，それぞれの項の $\mathcal{C}$ での解釈の equalizer の共通部分 $\bigcap_{i=1}^{n} \mathsf{Eq}(M_i^{A(\mathcal{C})}, N_i^{A(\mathcal{C})}) \rightarrowtail X_1 \times \cdots \times X_n$ に送る，
- $\{\, x_1 : X_1, \ldots, x_n : X_n \mid \overline{M} =_{\overline{Z}} \overline{N}\,\}$ から $\{\, y_1 : Y_1, \ldots, y_m : Y_m \mid \overline{K} =_{\overline{W}} \overline{L}\,\}$ への射である $\overline{P} : \overline{Y}$ の同値類を，その解釈 $\overline{P}^{A(\mathcal{C})} : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times \cdots \times Y_m$ が誘導する射に送る．

Proof. $\bigcap_{i=1}^{n} \mathsf{Eq}(M_i^{A(\mathcal{C})}, N_i^{A(\mathcal{C})})$ は，2 つの射

$$\overline{M}^{A(\mathcal{C})} = (M_1^{A(\mathcal{C})}, \ldots, M_i^{A(\mathcal{C})}),\ \overline{N}^{A(\mathcal{C})} = (N_1^{A(\mathcal{C})}, \ldots, N_i^{A(\mathcal{C})}) : X_1 \times \cdots \times X_n \to Z_1 \times \cdots \times Z_\ell$$

の equalizer である．

射の割り当てが well-defined であることが示せれば，関手性は普遍性から直ちに従う．

$$\begin{tikzcd}
\bigcap_{i=1}^{n} \mathsf{Eq}(M_i^{A(\mathcal{C})}, N_i^{A(\mathcal{C})}) \arrow[r, tail] \arrow[d, dashed] & X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[r, shift left, "\overline{M}^{A(\mathcal{C})}"] \arrow[r, shift right, "\overline{N}^{A(\mathcal{C})}"'] \arrow[d, "\overline{P}^{A(\mathcal{C})}"'] & Z_1 \times \cdots \times Z_\ell \\
\bigcap_{j=1}^{m} \mathsf{Eq}(K_j^{A(\mathcal{C})}, L_j^{A(\mathcal{C})}) \arrow[r, tail] & Y_1 \times \cdots \times Y_m \arrow[r, shift left, "\overline{K}^{A(\mathcal{C})}"] \arrow[r, shift right, "\overline{L}^{A(\mathcal{C})}"'] & W_1 \times \cdots \times W_k
\end{tikzcd}$$

したがって，示すべきは次の 2 つである：

- $$\mathcal{T} \Vdash \overline{x} : \overline{X} \,\Big|\, \overline{M} =_{\overline{Z}} \overline{N} \vdash \overline{K}[\overline{P}/\overline{y}] =_{\overline{W}} \overline{L}[\overline{P}/\overline{y}]$$

  が成り立つとき，任意の射 $f : Q \to X_1 \times \cdots \times X_n$ に対し，$M_i^{A(\mathcal{C})} f = N_i^{A(\mathcal{C})} f \ (\forall i)$ なら $K_j^{A(\mathcal{C})} \overline{P}^{A(\mathcal{C})} f = L_j^{A(\mathcal{C})} \overline{P}^{A(\mathcal{C})} f \ (\forall j)$ となる．

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "f"] & X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[r, shift left, "\overline{M}^{A(\mathcal{C})}"] \arrow[r, shift right, "\overline{N}^{A(\mathcal{C})}"'] \arrow[d, "\overline{P}^{A(\mathcal{C})}"'] & Z_1 \times \cdots \times Z_\ell \\
& Y_1 \times \cdots \times Y_m \arrow[r, shift left, "\overline{K}^{A(\mathcal{C})}"] \arrow[r, shift right, "\overline{L}^{A(\mathcal{C})}"'] & W_1 \times \cdots \times W_k
\end{tikzcd}$$

- $$\mathcal{T} \Vdash \overline{x} : \overline{X} \,\Big|\, \overline{M} =_{\overline{Z}} \overline{N} \vdash \overline{P} =_{\overline{Y}} \overline{P}'$$

  が成り立つとき，任意の射 $f : Q \to X_1 \times \cdots \times X_n$ に対し，$M_i^{A(\mathcal{C})} f = N_i^{A(\mathcal{C})} f \ (\forall i)$ なら $\overline{P}^{A(\mathcal{C})} f = \overline{P}'^{A(\mathcal{C})} f$ となる．

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "f"] & X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[r, shift left, "\overline{M}^{A(\mathcal{C})}"] \arrow[r, shift right, "\overline{N}^{A(\mathcal{C})}"'] \arrow[d, shift right, "\overline{P}^{A(\mathcal{C})}"'] \arrow[d, shift left, "\overline{P}'^{A(\mathcal{C})}"] & Z_1 \times \cdots \times Z_\ell \\
& Y_1 \times \cdots \times Y_m &
\end{tikzcd}$$

これらは等式論理における上で述べた意味論についての健全性を意味する．シーケントの証明木の長さに関する帰納法により示せばよいが詳細は省略する．例えば，代入律，置換律は $f = g, h = k$ なら $hf = kg$ という圏における合成の well-definedness に対応している． □

補題 12 (pullback)

圏 $\mathcal{C}$ の内部言語 $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ の項 $\overline{x} : \overline{X} \,\Big|\, M : Y$ 及び $\overline{z} : \overline{Z} \,\Big|\, N : Y$ に対し，$F_{\mathcal{C}}\left(\{\overline{x} : \overline{X}, \overline{z} : \overline{Z} \mid M =_Y N\}\right)$ は $M^{A(\mathcal{C})}$ と $N^{A(\mathcal{C})}$ の pullback である．

Proof. M, N をコンテクスト $\overline{x} : \overline{X}, \overline{z} : \overline{Z}$ の項とみたときの解釈はそれぞれ

$$X_1 \times \cdots \times X_n \times Z_1 \times \cdots \times Z_m \xrightarrow{proj} X_1 \times \cdots \times X_n \xrightarrow{M^{A(\mathcal{C})}} Y$$

$$X_1 \times \cdots \times X_n \times Z_1 \times \cdots \times Z_m \xrightarrow{proj} Z_1 \times \cdots \times Z_m \xrightarrow{N^{A(\mathcal{C})}} Y$$

であり，$M^{A(\mathcal{C})}$ と $N^{A(\mathcal{C})}$) の pullback とこの 2 つの射の equalizer は一致する． □

これで冒頭に提起した主張の証明を与えることができる．

$f : X \to Y, g : Z \to Y, h : X \to W$ に対し，

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y Z \arrow[r, "\Delta_{X/Y} \times_Y 1_Z"] \arrow[d, "X \times_Y \Delta_Z"'] & (X \times_Y X) \times_Y Z \arrow[d, "(h \circ \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{pr}_1, q \times_Y 1_Z)"] \\
X \times_Y (Z \times_Y Z) \arrow[r, "(h \circ \mathrm{pr}_1, (g \times_Y 1_Z) \circ \mathrm{pr}_2)"'] & W \times (Y \times_Y Z)
\end{tikzcd}$$

は可換図式である．

Proof. 等式の圏 $\mathcal{E}_{\mathcal{L}(\mathcal{C}),\mathcal{T}(\mathcal{C})}$ において，

$$\begin{tikzcd}
\{\, x : X, z : Z \mid f(x) = g(z) \,\} \arrow[r, "{(x,x,z)}"] \arrow[d, "{(x,z,z)}"'] & \{\, x : X, x' : X, z : Z \mid f(x) = f(x') = g(z) \,\} \arrow[d, "{(h(x'),f(x),z)}"] \\
\{\, x : X, z : Z, z' : Z \mid f(x) = g(z) = g(z') \,\} \arrow[r, "{(h(x),g(z),z')}"'] & \{\, w : W, y : Y, z : Z \mid y = g(z) \,\}
\end{tikzcd}$$

は可換図式である．実際，

$$\begin{aligned}
(h(x'), f(x), z)[x/x, x/x', z/z] &= (h(x), f(x), z), \\
(h(x), g(z), z')[x/x, z/z, z/z'] &= (h(x), g(z), z)
\end{aligned}$$

より，

$$\mathcal{T} \Vdash x : X, z : Z \,\Big|\, f(x) = g(z) \vdash (h(x'), f(x), z)[x/x, x/x', z/z] =_{W,Y,Z} (h(x), g(z), z')[x/x, z/z, z/z']$$

となる．よって，定理 11 より，これを $F_{\mathcal{C}}$ で送ってできる上の図式も可換である． □

最後に少し補足する．

実は，関手 $F_{\mathcal{C}}$ は圏同値となることがわかる．定理 11 の証明が健全性を示すことに対応していたが，こちらは完全性，すなわち圏 $\mathcal{C}$ で正しい等式は証明できることに対応する．つまり，有限極限（本当は有限積で充分）を持つ圏はある意味構文論的に記述できるのだ．これについては証明は与えないが，気になる方は [1] を参照していただきたい．この記事の内容もおおむねこのテキストに依拠している．

元を送って可換性を示すことの正当化にはこの記事で述べたのとは別の説明もできる．よく知られているものとして，圏が separating family $\mathcal{G}$ を持つとき，$\mathcal{G}$ の対象からの射を"元"と見なせば，元を送ることが射を前に合成することに対応して可換性が確かめられる．（例えばホモロジー代数の教科書などで 5 項補題を一般のアーベル圏で示すときに使われる説明だと思う．）

参考文献

[1] Bart Jacobs. *Categorical logic and type theory.* Elsevier, 1999.

[2] Emily Riehl. *Category theory in context.* Courier Dover Publications, 2017.